ENAC

C. EXT. I.E.E.A.C. (CF et CT) 1981

Epreuve commune de mathématiques

Durée 3 heures

Coef. 1

Cette épreuve comprend deux problèmes indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLEME

$\mathcal{P}$ est l'espace vectoriel sur le corps des réels des fonctions polynômes dans $\mathbb{R}$, à coefficients réels, de degré quelconque. n est un entier naturel fixé.

1°) Montrer que le sous-ensemble E de $\mathcal{P}$ constitué par les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ dont les $n + 1$ éléments

$$\varepsilon_i : x \longmapsto x^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

forment une base que l'on appellera la base canonique de E

Vérifier que le système $(e_o, e_1, \ldots, e_n)$ des vecteurs de $\mathcal{P}$ tels que

$$e_o(x) = 1$$

$$\forall i \geq 1 \qquad e_i(x) = \frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{i!}$$

est une base de E.

---/---

2°) L est l'ensemble des endomorphismes de E , c'est-à-dire des applications linéaires de E vers E . Pour tout élément f de L , nous désignerons par $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$f^0 = I \quad \text{(endomorphisme identique de E)}$$

$$\forall k \in N \quad f^{k+1} = f \circ f^k .$$

Montrer que pour toute fonction polynôme $p \in E$ la fonction p^* définie par $p^*(x) = p(x + 1)$ est un élément de E et que l'application U de E vers E définie par $U(p) = p^*$ est un élément de L. Est-il bijectif ? Ecrire la matrice représentant U dans la base canonique de E .

3°) Montrer que la dérivée p' de toute fonction $p \in E$ est un élément de E , et que l'application D de E vers E définie par $D(p) = p'$ est un endomorphisme de E . Déterminer le noyau de D.

Vérifier que D est lié à l'endomorphisme U défini dans la question précédente par la relation

$$U = I + \frac{1}{1!} D + \ldots + \frac{1}{n!} D^n$$

Ecrire les matrices qui représentent dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ les applications $\Delta = U - I$ et Δ^k ; déterminer le noyau de Δ^k .

Que dire de Δ^{n+1}.

4°) Soit H l'ensemble des endomorphismes d de E tels que, pour tout couple (p, q) d'éléments de E dont le produit ordinaire $p \cdot q$ appartient aussi à E , on ait :

$$d(p \cdot q) = p \cdot d(q) + d(p) \cdot q$$

Montrer que H n'est pas vide.

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ étant les vecteurs constituant la base canonique de E , calculer $d(\varepsilon_0)$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $k \leqslant n$, on a

$$d(\varepsilon_k) = (k\, \varepsilon_{k-1}) \cdot d(\varepsilon_1)$$

---/---

Que peut-on dire du degré de $d(\varepsilon_1)$; en déduire que H est l'ensemble des endomorphismes d de E définis par

$$d(p) = D(p) \cdot (\lambda \varepsilon_0 + \mu \varepsilon_1)$$

où λ et μ sont des réels quelconques.

λ et μ étant donnés, écrire la matrice qui représente dans la base canonique l'endomorphisme d qui à la fonction polynôme $\varepsilon_1 : x \longmapsto x$ associe la fonction polynôme $d(\varepsilon_1) : x \longmapsto \lambda + \mu x$.

5°) Pour k entier positif montrer que :

$$U^k = I + \frac{k}{1!}\Delta + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}\Delta^n ,$$

On pourra d'abord envisager le cas où $0 < k \leqslant n$.

On désigne par $\Delta^k p$ l'image par Δ^k du polynôme p élément de E ; montrer que pour tout réel x_0 et pour tout entier k

$$p(x_0 + k) = p(x_0) + \frac{k}{1!}\Delta p(x_0) + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}\Delta^n p(x_0)$$

Montrer que cette formule est encore vraie si k est un réel quelconque.

DEUXIEME PROBLEME

f étant une fonction réelle continue de la variable réelle x, lorsque la limite pour a tendant vers $+\infty$ de $\int_0^a f(x)\,dx$ existe, on note cette limite par $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ qui est dite intégrale convergente.

1°) n étant un entier positif ou nul, montrer que

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx \text{ est convergente et calculer sa valeur.}$$

2°) k étant entier positif, on note $f_n^{(k)}$ la fonction définie par $f_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}(x^n e^{-x})$

Montrer que $f_n^{(k)}(x) = P_n^k(x)\, e^{-x}$ où P_n^k est un polynôme que l'on explicitera.

Montrer que $\int_o^{+\infty} P_n^k(x)\, e^{-x}\, dx$ est convergente et calculer sa valeur selon les valeurs de k.

3°) r est un entier tel que $0 \leq r < n$ et on pose $Q_n = P_n^n$, montrer que $\int_o^{+\infty} x^r\, Q_n(x)\, e^{-x}\, dx$ est convergente et calculer sa valeur.

m étant un entier, calculer les intégrales $\int_o^{+\infty} Q_n(x)\, Q_m(x)\, e^{-x}\, dx$ pour $m \neq n$ et pour $m = n$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail